

# Estática

5

Equilibrio de un cuerpo rígido



# Objetivos

---

- Escribir las ecuaciones de equilibrio de un cuerpo rígido.
  - Concepto de diagrama de cuerpo libre para un cuerpo rígido.
  - Resolver problemas de equilibrio para un sólido rígido.
-

# Índice

---

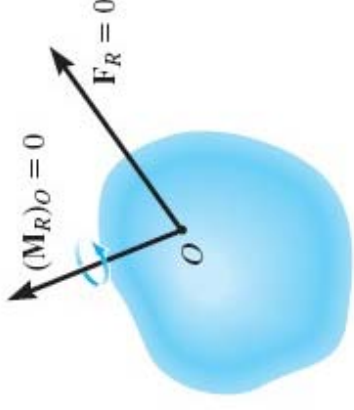
1. Condiciones para el equilibrio del cuerpo rígido
  2. Diagramas de cuerpo libre
  3. Ecuaciones del equilibrio
  4. Miembros de dos y tres fuerzas
  5. Más diagramas de cuerpo libre
  6. Nuevas ecuaciones de equilibrio
  7. Ligaduras y determinación estática
-

# 5.1 Condiciones de equilibrio

- El equilibrio de un cuerpo se expresa como

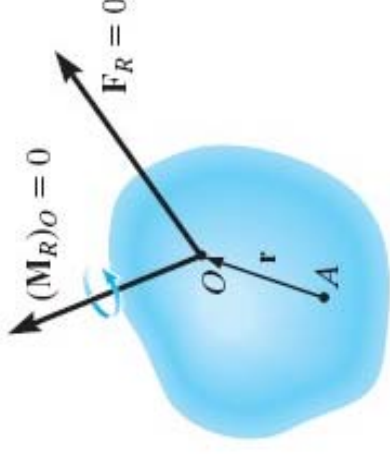
$$F_R = \sum F = 0$$
$$(M_R)_O = \sum M_O = 0$$

Condición necesaria y suficiente



- Considere sumar los momentos respecto algún otro punto, tal como A, requerimos

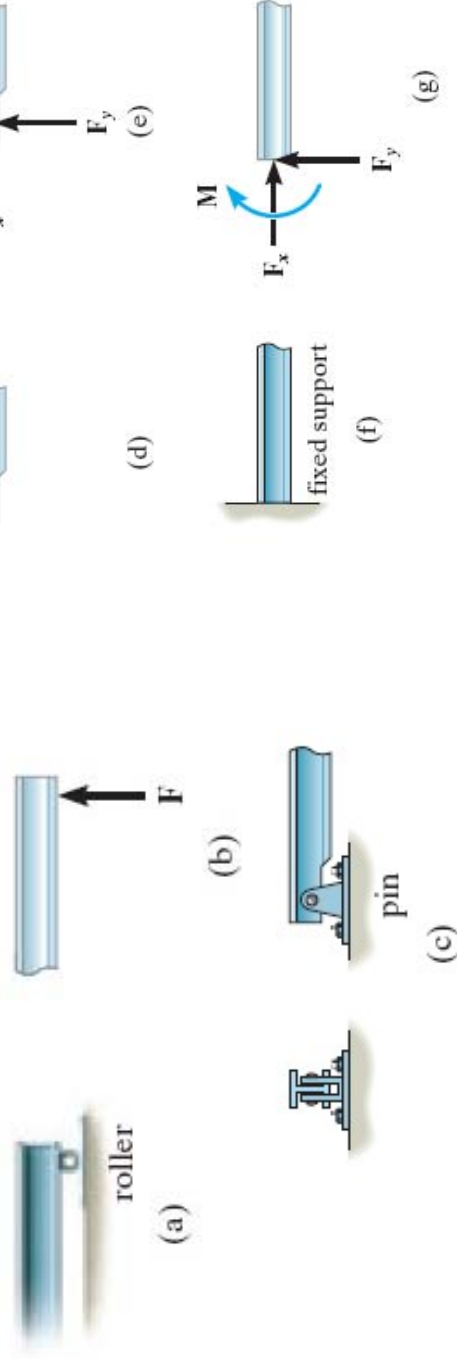
$$\sum M_A = r \times F_R + (M_R)_O = 0$$



## 5.2 Diagramas de cuerpo libre

### Reacciones en los soportes

- Si un soporte previene la traslación de un cuerpo en una dirección dada, entonces sobre el cuerpo actúa una fuerza en esa dirección.
- Si previene la rotación, se desarrolla un momento de par sobre el cuerpo.



**TABLE 5-1 Supports for Rigid Bodies Subjected to Two-Dimensional Force Systems**
















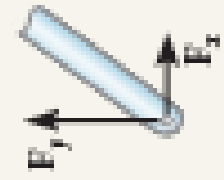


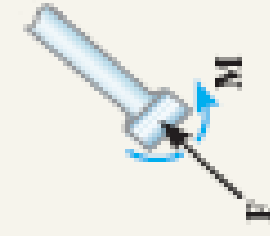
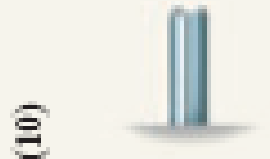
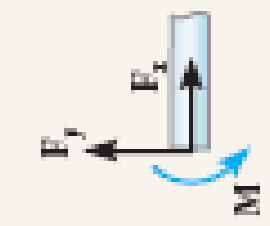
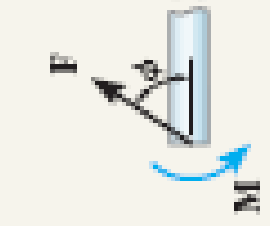
Types of Connection	Reaction	Number of Unknowns
<p>(1)  cable</p>	 <p>One unknown. The reaction is a tension force which acts away from the member in the direction of the cable.</p>	
<p>(2)  weightless link</p>	 <p>One unknown. The reaction is a force which acts along the axis of the link.</p>	
<p>(3)  roller</p>	 <p>One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the surface at the point of contact.</p>	
<p>(4)  roller or pin in confined smooth slot</p>	 <p>One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the slot.</p>	
<p>(5)  rocker</p>	 <p>One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the surface at the point of contact.</p>	
<p>(6)  smooth contacting surface</p>	 <p>One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the surface at the point of contact.</p>	
<p>(7)  member pin connected to roller on smooth rod</p>	 <p>One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the rod.</p>	

TABLE 5-1 Continued

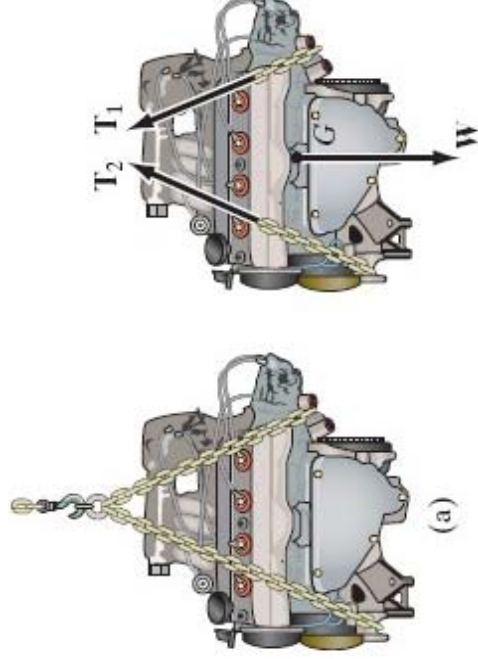
Types of Connection	Reaction	Number of Unknowns
<p>(8)</p>  <p>smooth pin or hinge</p>	 <p>or</p> 	<p>Two unknowns. The reactions are two components of force, or the magnitude and direction <math>\phi</math> of the resultant force. Note that <math>\phi</math> and <math>\theta</math> are not necessarily equal [usually not, unless the rod shown is a link as in (2)].</p>
<p>(9)</p>  <p>member fixed connected to collar on smooth rod</p>		<p>Two unknowns. The reactions are the couple moment and the force which acts perpendicular to the rod.</p>
<p>(10)</p>  <p>fixed support</p>	 <p>or</p> 	<p>Three unknowns. The reactions are the couple moment and the two force components, or the couple moment and the magnitude and direction <math>\phi</math> of the resultant force.</p>

## 5.2 Diagramas de cuerpo libre

---

### Fuerzas internas

- Fuerzas internas y externas actúan sobre un cuerpo rígido.
- Ya que las fuerzas internas actúan entre partículas contedidas dentro del contorno del DCL, no se pintan
- La partículas o sistemas fuera del contorno ejercen fuerzas externas sobre el sistema.





## 5.2 Diagramas de cuerpo libre

---

### Peso y centro de gravedad

- Cada partícula tiene un peso específico, y puede considerarse un sistema de fuerzas paralelas.
- El sistema se puede representar mediante una única fuerza resultante conocida como peso  $\mathbf{W}$  del cuerpo
- El punto de aplicación del peso es conocido como el *centro de gravedad* (nótese que es independiente del punto elegido para calcularlo).

## 5.2 Diagramas de cuerpo libre

---

### Procedimiento para dibujar un DCL

1. Esbozar la forma del cuerpo
  - Imagine que el cuerpo está aislado, cortando o liberándolo de sus ligaduras.
  - Dibuje esta situación.
2. Mostrar todas las fuerzas y momentos de pares
  - Identifique todas las fuerzas externas y los momentos de pares que actúan sobre el cuerpo

## 5.2 Diagramas de cuerpo libre

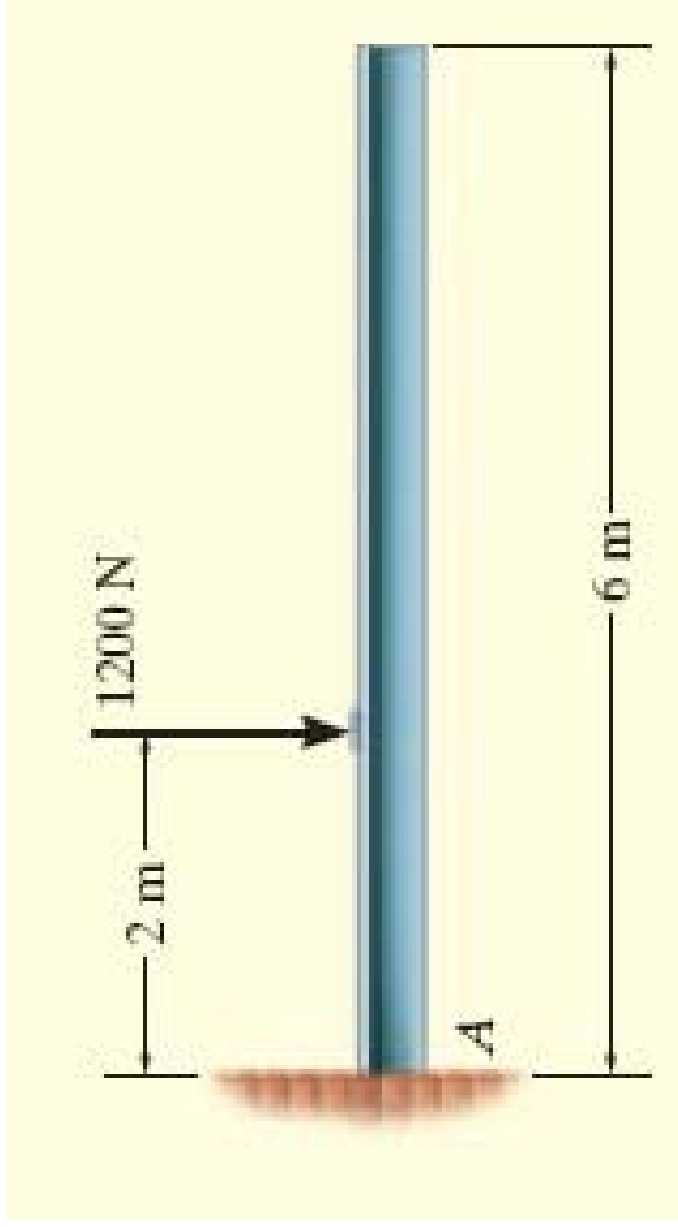
---

3. Identifique cada carga y dé las dimensiones
    - Indicar las dimensiones
    - Las fuerzas y momentos conocidos deben de pintarse con sus etiquetas, magnitudes y direcciones
-

# Ejemplo 5.1

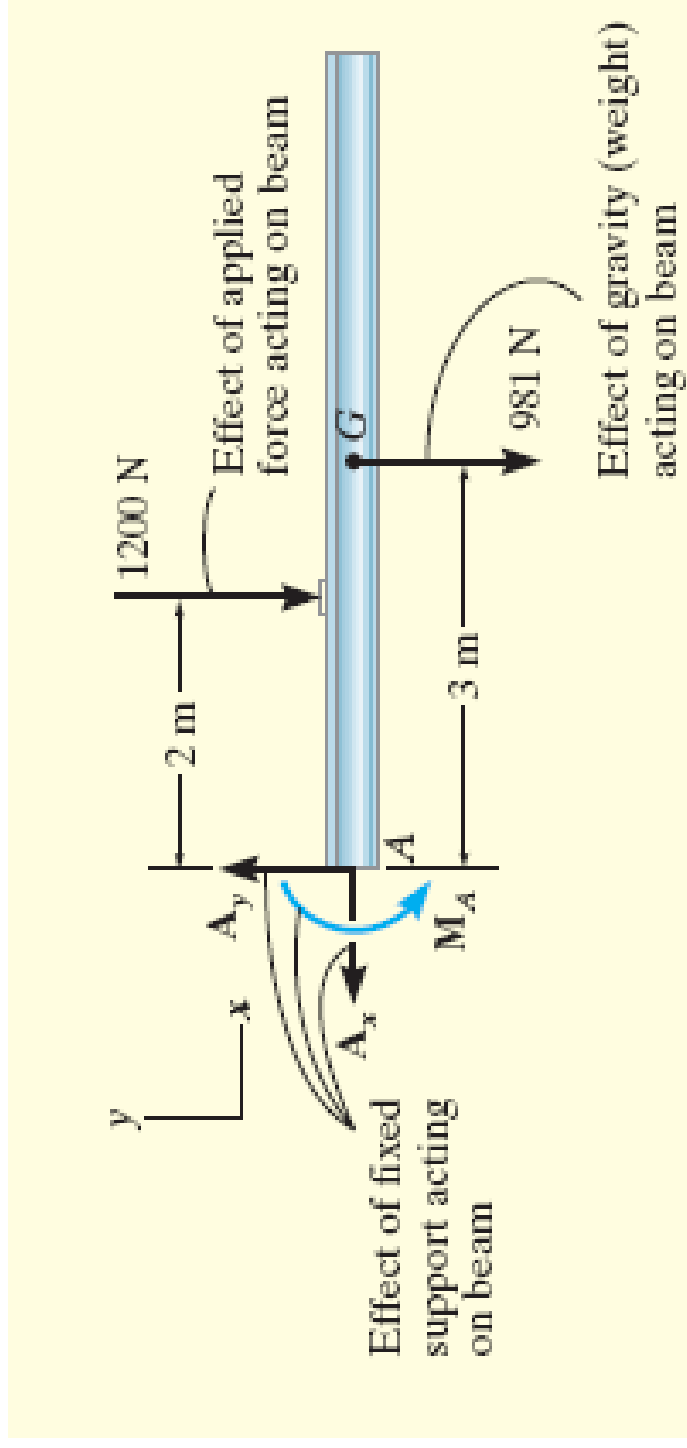
---

Dibuje el DCL de la viga. La viga es uniforme y tiene una masa de 100 kg.



# Solución

## Diagrama de cuerpo libre



# Solución

---

## DCL

- El soporte A es un muro fijo
- Las tres fuerzas que actúan sobre la viga en A se denotan como  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$ , dibujadas en dirección arbitraria
- Las magnitudes de esos vectores son desconocidas
- Asumir el sentido de esos vectores
- Para una viga uniforme,  
Peso,  $W = 100(9.81) = 981 \text{ N}$   
actuando en el centro de gravedad de la viga, a 3 m desde A

## 5.3 Ecuaciones de Equilibrio

---

- Para el equilibrio de un cuerpo rígido en 2D,  
 $\Sigma F_x = 0$ ;  $\Sigma F_y = 0$ ;  $\Sigma M_0 = 0$
- $\Sigma F_x$ ,  $\Sigma F_y$  representan la suma de las componentes x, y de todas las fuerzas
- $\Sigma M_0$  representa la suma de los momentos de los pares y de los momentos de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo

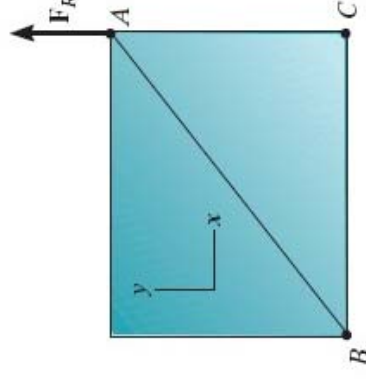
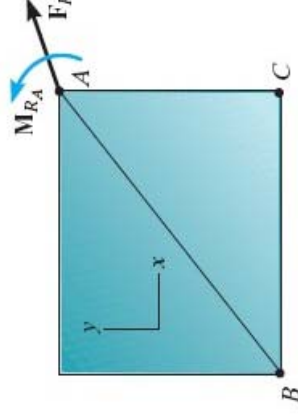
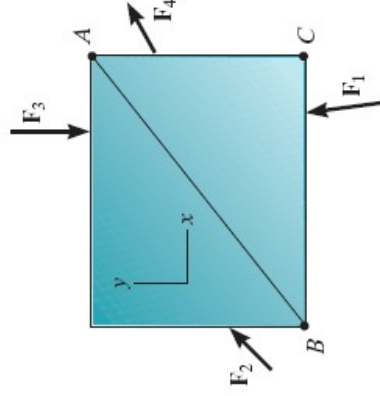
## 5.3 Ecuaciones de Equilibrio

### Ecuaciones de equilibrio alternativas

- Para problemas coplanares de equilibrio,  $\sum F_x = 0$ ;  $\sum F_y = 0$ ;  $\sum M_0 = 0$  (respecto al eje z, O cualquier punto).
- 2 formas alternativas de las 3 ecuaciones de equilibrio independientes: AB no  $\parallel$  al eje y, ABC no colineales.

$$\sum F_x = 0; \sum M_A = 0; \sum M_B = 0, \quad \sum M_A = 0; \sum M_B = 0; \sum M_C = 0$$

$(F_{Ry} = 0) \quad (F_{Ry} = 0); \quad (F_{Rx} = 0)$





## 5.3 Ecuaciones de Equilibrio

---

### Procedimiento de análisis

#### DCL

- La fuerza o el momento tienen magnitud desconocida, pero podemos asumir sus líneas de acción
- Indicar las dimensiones del cuerpo necesarias para calcular los momentos de las fuerzas

## 5.3 Ecuaciones de Equilibrio

---

### Procedimiento de análisis

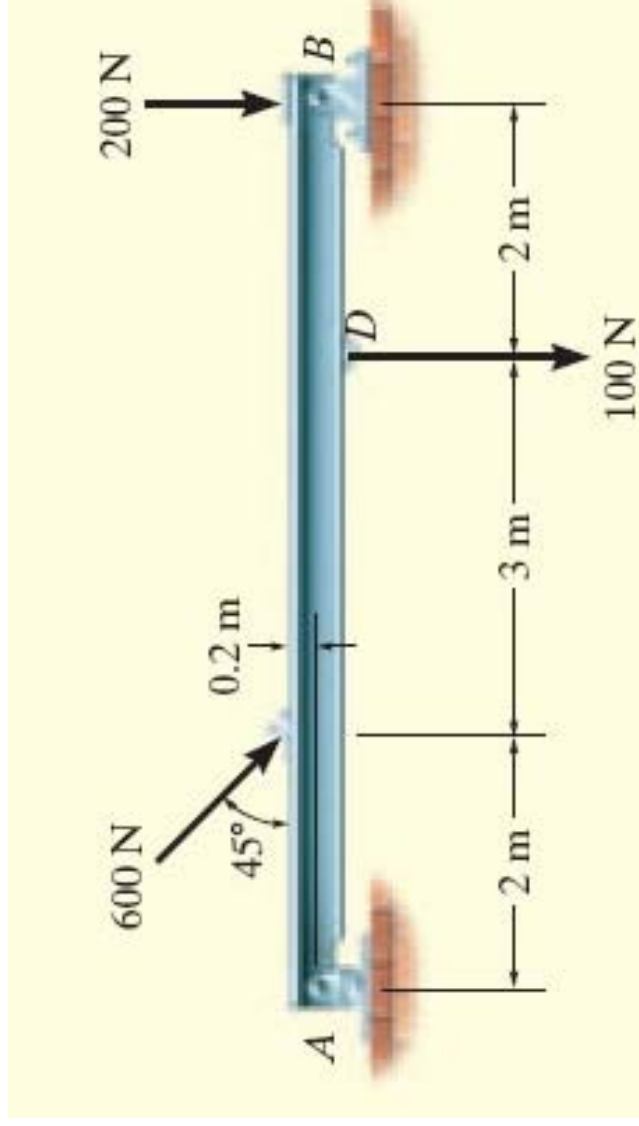
#### Ecuaciones de equilibrio

- Aplicar  $\sum M_0 = 0$  respecto al pto O
- Orientar los ejes x, y a lo largo de las líneas que dan la resolución más simple de las fuerzas en sus componentes x, y
- Un resultado escalar negativo supone que el sentido es negativo respecto al que se asumió en el DCL

# Ejemplo

---

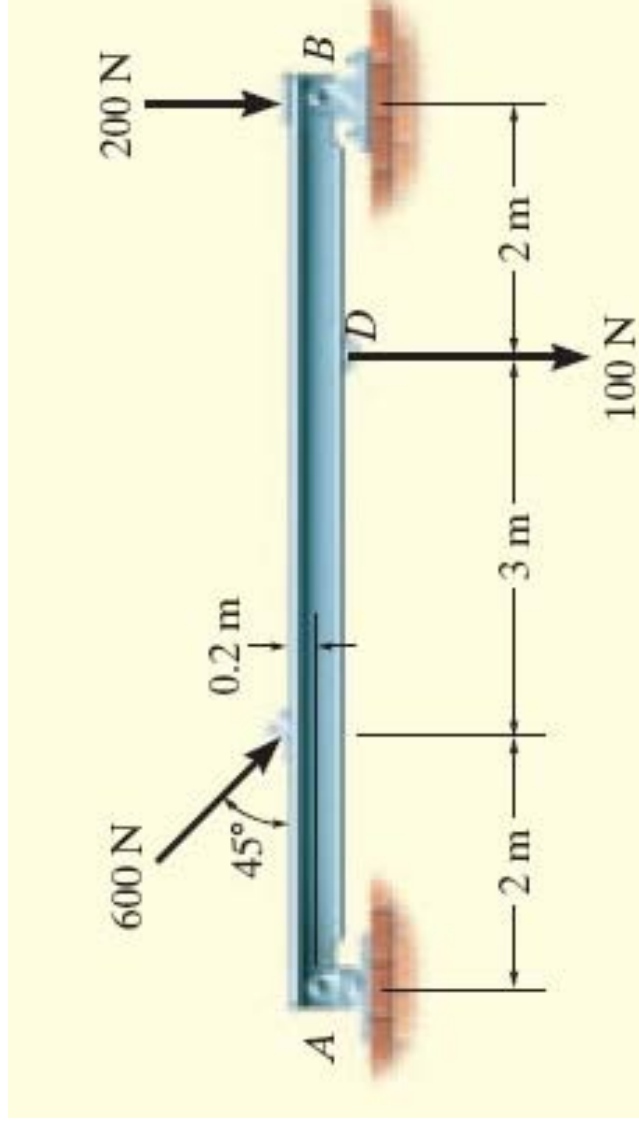
Determine las componentes horizontales y verticales de las reacciones para la viga. Desprecie el peso de la viga.



# Ejemplo

---

Determine las componentes horizontales y verticales de las reacciones para la viga. Desprecie el peso de la viga.

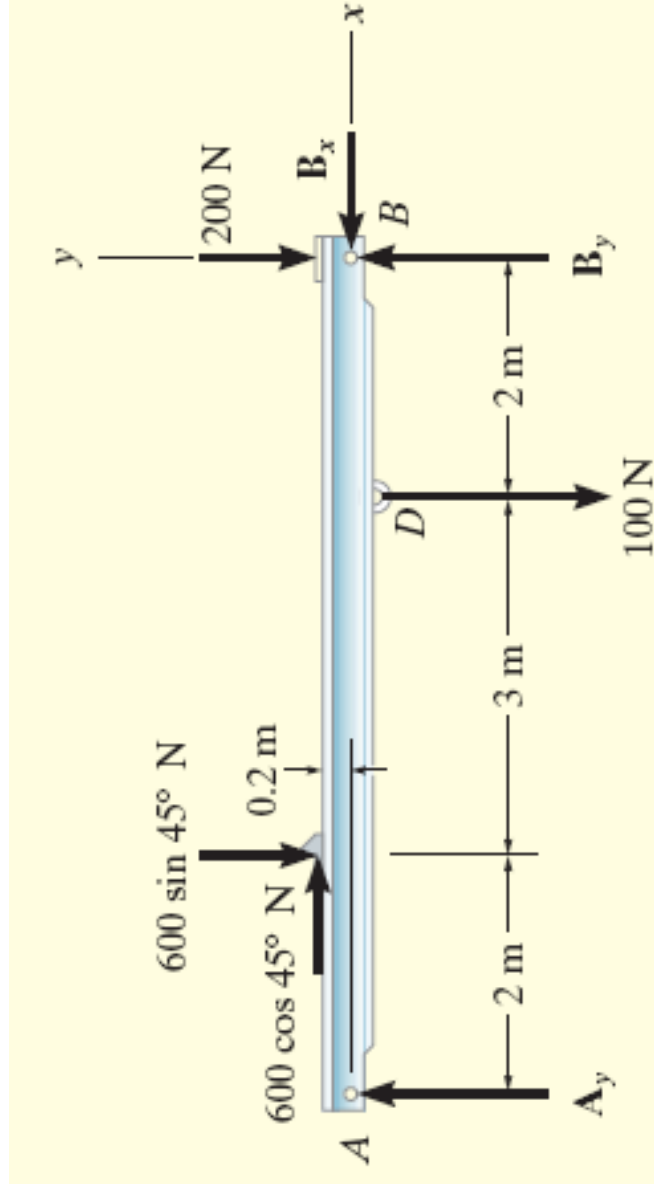


# Solución

---

## DCL

- 600 N representada por las componentes  $x,y$
- 200 N actúa sobre la viga en B



# Solución

---

## Ecuaciones de Equilibrio

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; \quad 600 \cos 45^\circ N - B_x = 0 \Rightarrow B_x = 424 N$$

$$+\curvearrowright \sum M_B = 0;$$

$$100 N(2\text{m}) + (600 \sin 45^\circ N)(5\text{m}) - (600 \cos 45^\circ N)(0.2\text{m}) - A_y(7\text{m}) = 0$$

$$A_y = 319 N$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$319 N - 600 \sin 45^\circ N - 100 N - 200 N + B_y = 0$$

$$B_y = 405 N$$

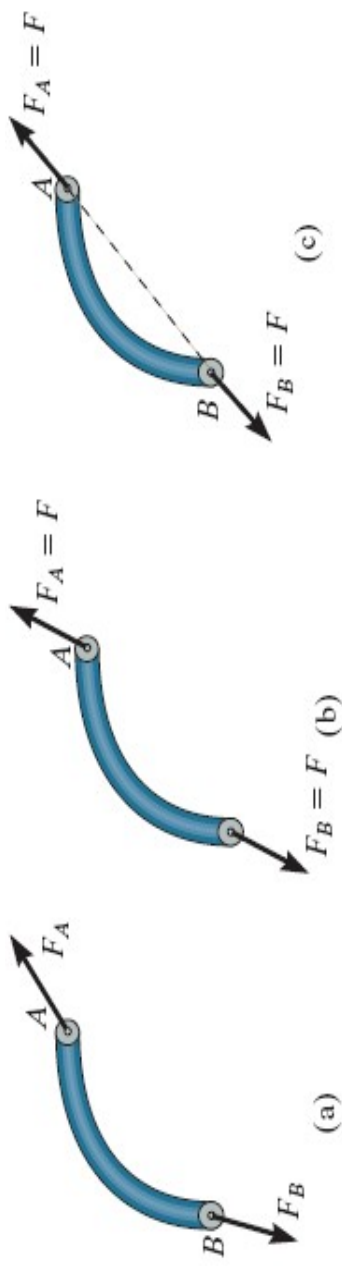
Nota: Se puede comprobar el resultado de  $B_y$  calculando los momentos respecto al punto A.

## 5.4 Miembros de 2 y 3 fuerzas

La solución se simplifica reconociendo miembros sujetos a solo 2 o 3 fuerzas

### Miembros de 2 fuerzas

- Cuando las fuerzas se aplican a solo dos puntos de un elemento, el elemento se llama *miembro de dos fuerzas*
- Solo la magnitud de la fuerza debe de determinarse



Two-force member

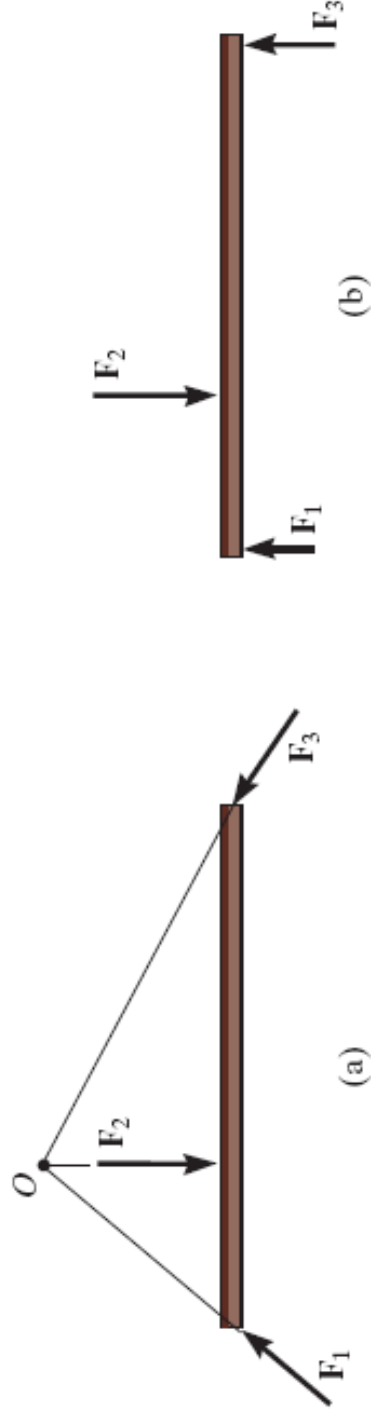
La condiciones de equil requieren que actúen en la misma línea de acción: (b)  $F_R = 0$  (c)  $M_A = 0$  o  $M_B = 0$

## 5.4 Miembros de dos y tres fuerzas

---

### Miembros de 3 fuerzas

- Cuando un elemento está sujeto a 3 fuerzas, las fuerzas son concurrentes o paralelas (si dos se cortan, la tercera también, ya que  $M_0 = 0$ )



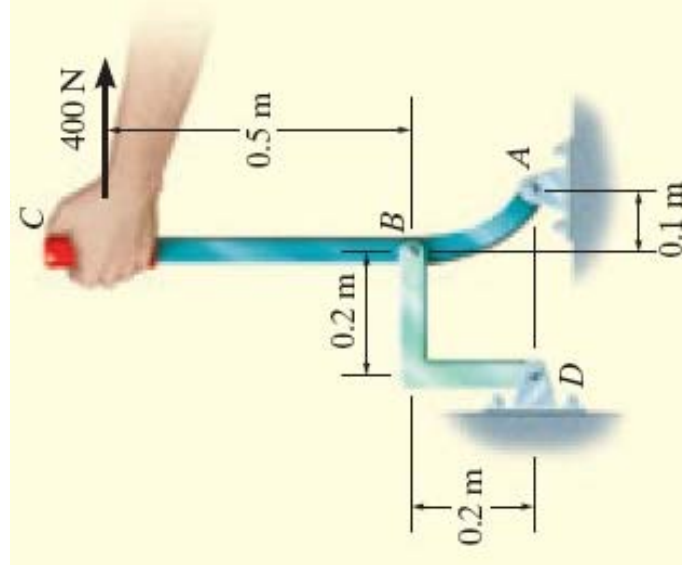
Three-force member



# Ejemplo

---

La palanca ABC está sostenida por la articulación A y conectada a una unión BD. Si el peso de los elementos se puede despreciar, determine la fuerza del soporte sobre la palanca en A.



# Solución

## DCL

- BD es un miembro de 2 fuerzas
- Palanca ABC miembro de 3

## Ecuaciones de Equilibrio

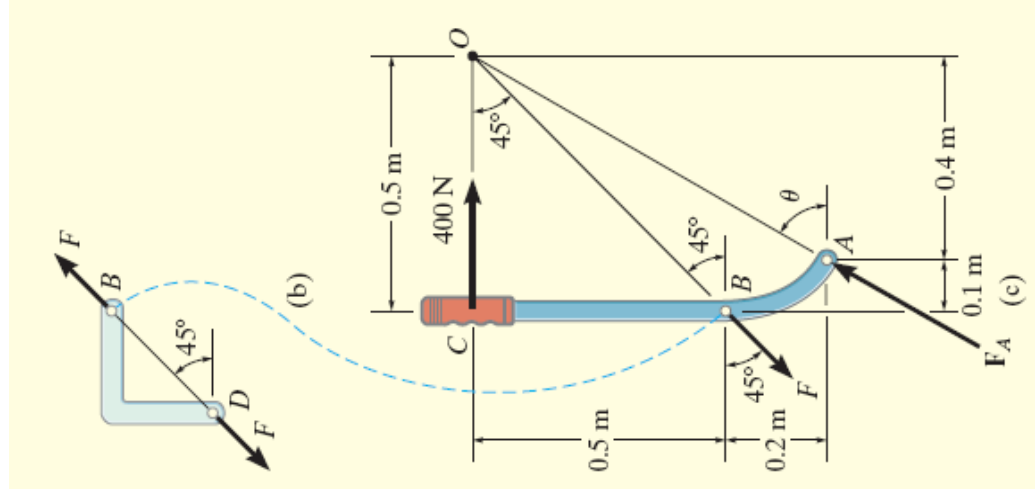
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0.7}{0.4}\right) = 60.3^\circ$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; \quad F_A \cos 60.3^\circ - F \cos 45^\circ + 400 \text{ N} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad F_A \sin 60.3^\circ - F \sin 45^\circ = 0$$

$$\text{Resolviendo,} \quad F_A = 1.07 \text{ kN}$$

$$F = 1.32 \text{ kN}$$



## 5.5 Diagramas de cuerpo libre 3D

---

### Reacciones de los soportes

Como en el caso dimensional:

- Una fuerza es ejercida por un soporte
  - Un momento de par se desarrolla cuando se impide la rotación de un miembro ligado
  - La orientación de la fuerza se define por los ángulos de coordenadas  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$
-

**TABLE 5-2 Supports for Rigid Bodies Subjected to Three-Dimensional Force Systems**




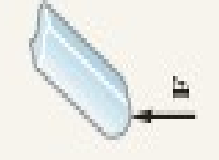

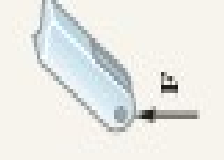

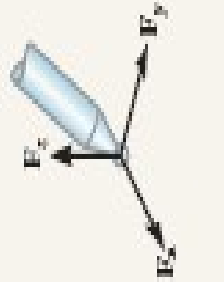









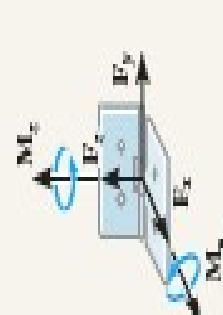


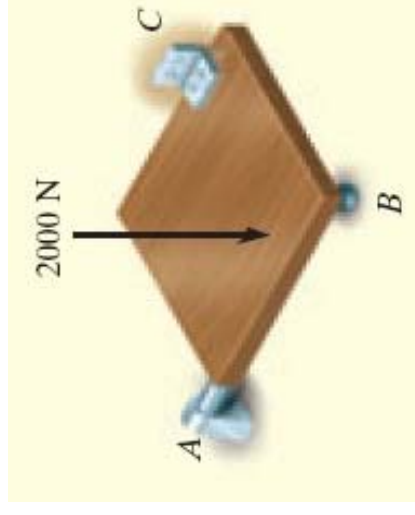
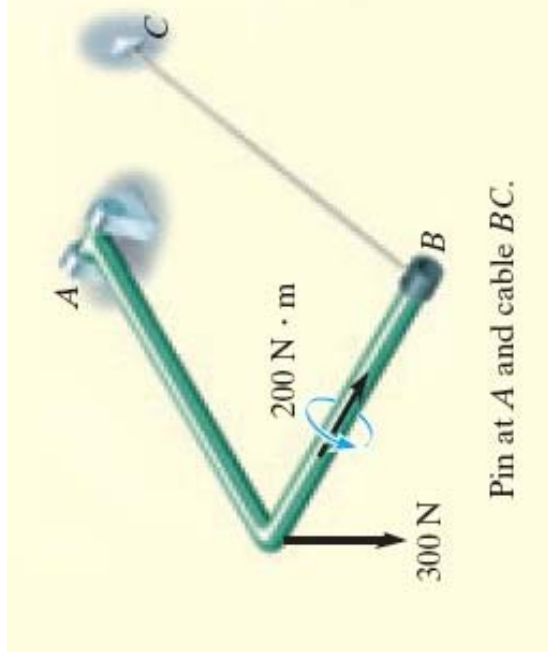
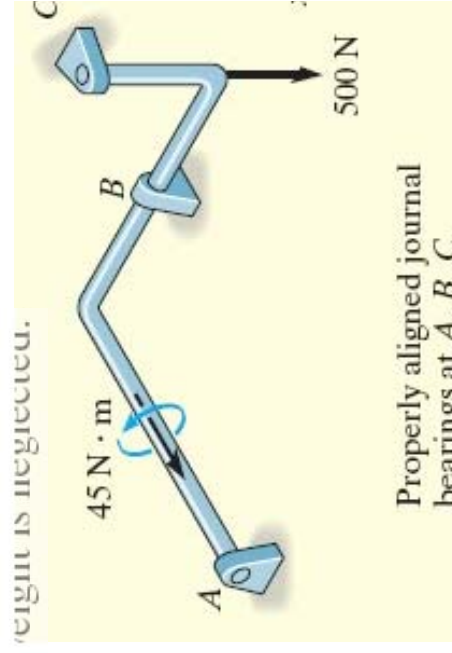
Types of Connection	Reaction	Number of Unknowns
<p>(1)</p>  <p>cable</p>		<p>One unknown. The reaction is a force which acts away from the member in the known direction of the cable.</p>
<p>(2)</p>  <p>smooth surface support</p>		<p>One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the surface at the point of contact.</p>
<p>(3)</p>  <p>roller</p>		<p>One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the surface at the point of contact.</p>
<p>(4)</p>  <p>ball and socket</p>		<p>Three unknowns. The reactions are three rectangular force components.</p>
<p>(5)</p>  <p>single journal bearing</p>		<p>Four unknowns. The reactions are two force and two couple-moment components which act perpendicular to the shaft. Note: The couple moments are generally not applied if the body is supported elsewhere. See the examples.</p>

TABLE 5-2 Continued

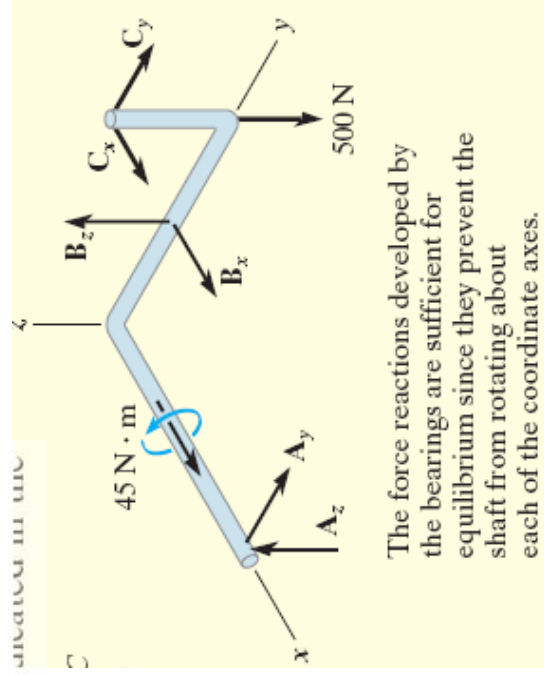
Types of Connection	Reaction	Number of Unknowns
<p>(6)</p>  <p>single journal bearing with square shaft</p>		<p>Five unknowns. The reactions are two forces and three couple-moment components. <i>Note:</i> The couple moments are generally not applied if the body is supported elsewhere. See the examples.</p>
<p>(7)</p>  <p>single thrust bearing</p>		<p>Five unknowns. The reactions are three force and two couple-moment components. <i>Note:</i> The couple moments are generally not applied if the body is supported elsewhere. See the examples.</p>
<p>(8)</p>  <p>single smooth pin</p>		<p>Five unknowns. The reactions are three force and two couple-moment components. <i>Note:</i> The couple moments are generally not applied if the body is supported elsewhere. See the examples.</p>
<p>(9)</p>  <p>single hinge</p>		<p>Five unknowns. The reactions are three force and two couple-moment components. <i>Note:</i> The couple moments are generally not applied if the body is supported elsewhere. See the examples.</p>
<p>(10)</p>  <p>fixed support</p>		<p>Six unknowns. The reactions are three force and three couple-moment components.</p>

# Ejemplo

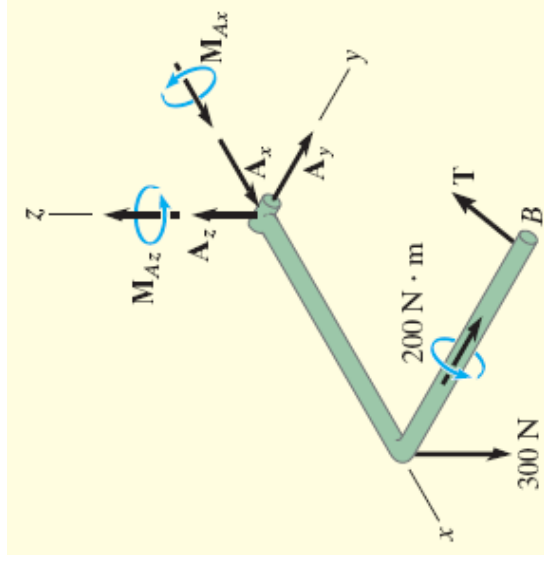
Dibujar el DCL de los objetos mostrados. Despreciar el peso de los objetos



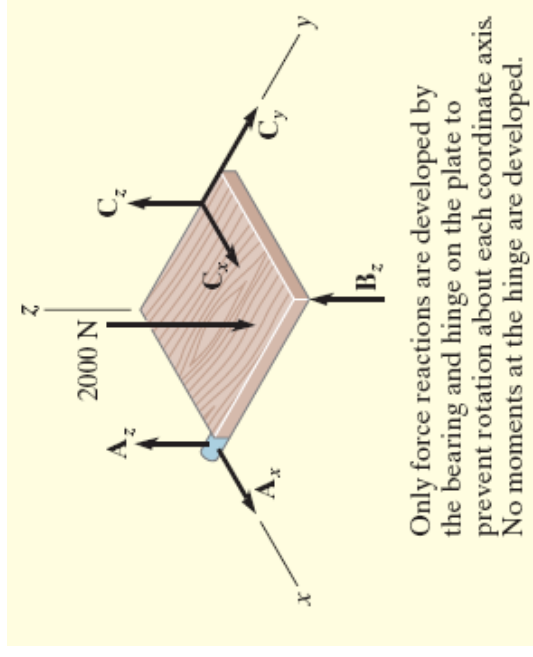
# Solución



The force reactions developed by the bearings are sufficient for equilibrium since they prevent the shaft from rotating about each of the coordinate axes.



Moment components are developed by the pin on the rod to prevent rotation about the  $x$  and  $z$  axes.



Only force reactions are developed by the bearing and hinge on the plate to prevent rotation about each coordinate axis. No moments at the hinge are developed.

Los momentos no se tienen en cuenta porque son ligaduras redundantes en el primer y tercer caso.

## 5.6 Ecuaciones de Equilibrio

---

### Ecuaciones vectoriales de equilibrio

- Las dos condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido en forma vectorial,

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \sum \mathbf{M}_0 = 0$$

### Ecuaciones de equilibrio en forma escalar

- Si todas las fuerzas externas y momentos de expresan en forma cartesiana

$$\sum \mathbf{F} = \sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} + \sum F_z \mathbf{k} = 0$$

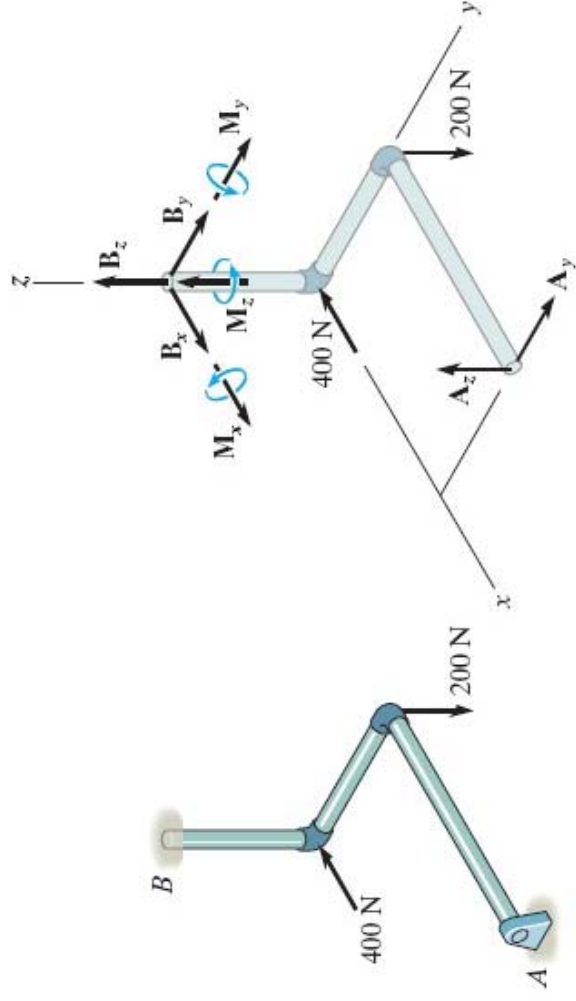
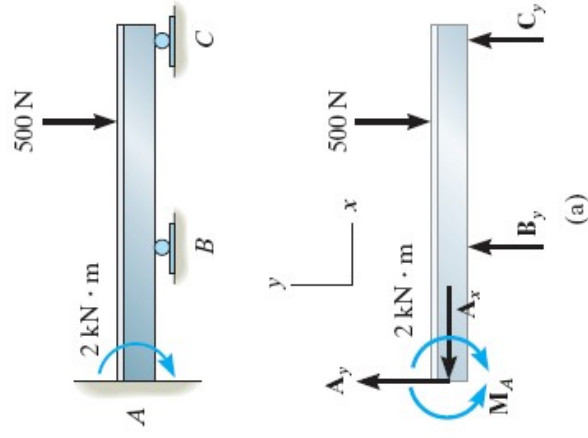
$$\sum \mathbf{M}_0 = \sum M_x \mathbf{i} + \sum M_y \mathbf{j} + \sum M_z \mathbf{k} = 0$$



# 5.7 Ligaduras para un cuerpo rígido

## Ligaduras redundantes

- Más soportes de los necesarios para el equilibrio
- Estáticamente indeterminado: más cargas desconocidas que ecuaciones

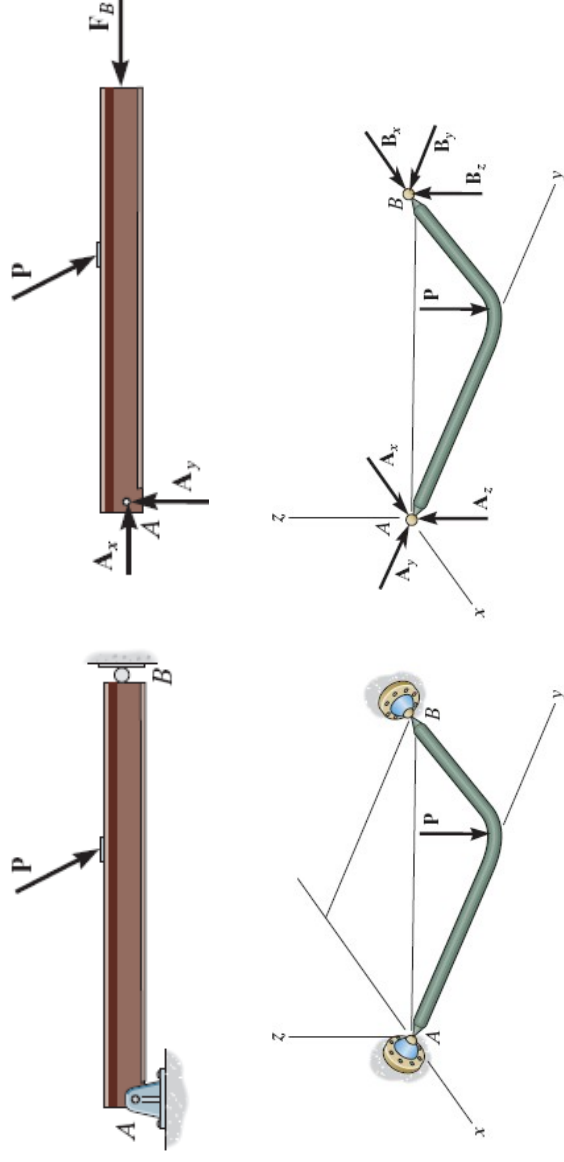


## 5.7 Ligaduras para un cuerpo rígido

---

### Ligaduras impropias

- La restricción impropia de los soportes causa inestabilidad
- Cuando las fuerzas reactivas son concurrentes en un punto, el cuerpo está impropriamente ligado o sujeto (en 3-D cuando intersectan un eje)



## 5.7 Ligaduras para un cuerpo rígido

---

### Procedimiento de análisis

#### DCL

- Esboce la forma del cuerpo
- Pinte todas las fuerzas y momentos de pares que actúan sobre el cuerpo
- Pintar todas las componentes desconocidas con sentido positivo
- Indicar las dimensiones necesarias del cuerpo para calcular los momentos de las fuerzas

## 5.7 Ligaduras para un cuerpo rígido

---

### Procedimiento de análisis

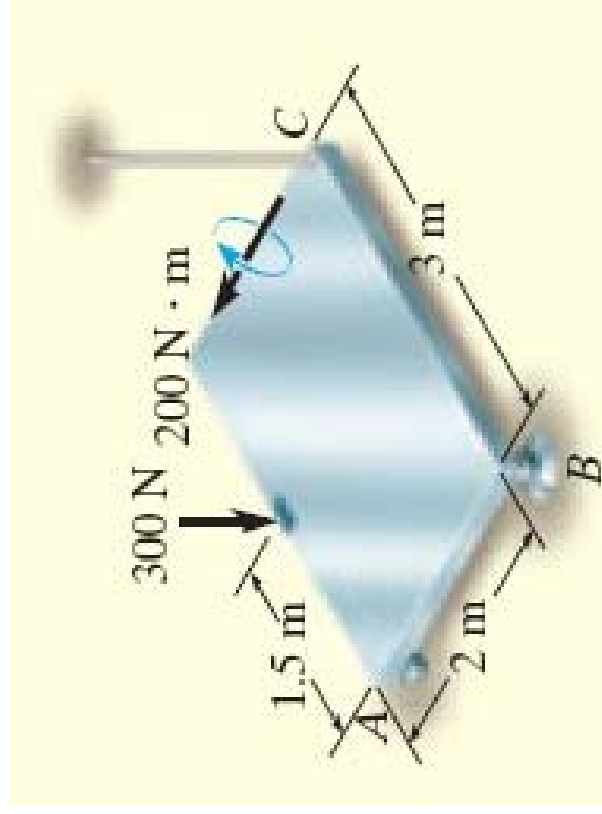
#### Ecuaciones de Equilibrio

- Aplicar las seis ecuaciones escalares o las dos vectoriales de equilibrio
- Cualquier conjunto de ejes, no ortogonales puede elegirse para esto
- Elija la dirección de un eje para sumar momentos de manera que intersecte tantas líneas de acción de las fuerzas desconocidas como sea posible

# Ejemplo

---

La placa homogénea tiene una masa de 100 kg y está sujeta a una fuerza y un momento de par a lo largo de sus lados. Si está aguantada horizontalmente por medio de una rodadura en A, una unión de pivote en B, y una cuerda en C, determine las componentes de las reacciones en los soportes.



# Solución

---

## DCL

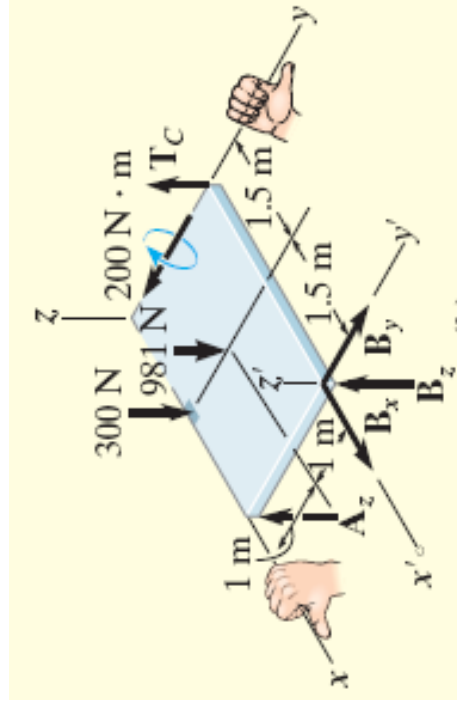
- Cinco reacciones a determinar actúan sobre la placa
- Cada reacción se asume que actúa en una dirección coordenada positiva

## Ecuaciones de Equilibrio

$$\sum F_x = 0; B_x = 0$$

$$\sum F_y = 0; B_y = 0$$

$$\sum F_z = 0; A_z + B_z + T_C - 300 \text{ N} - 981 \text{ N} = 0$$



# Solución

---

## Ecuaciones de Equilibrio

$$\sum M_x = 0; T_C(2\text{m}) - 981\text{ N}(1\text{m}) + B_z(2\text{m}) = 0$$

$$\sum M_y = 0;$$

$$300\text{ N}(1.5\text{m}) + 981\text{ N}(1.5\text{m}) - B_z(3\text{m}) - A_z(3\text{m}) - 200\text{ N} \cdot \text{m} = 0$$

- La componentes de la fuerza en B se pueden eliminar si se usan los ejes  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$

$$\sum M_{x'} = 0; 981\text{ N}(1\text{m}) + 300\text{ N}(2\text{m}) - A_z(2\text{m}) = 0$$

$$\sum M_{y'} = 0;$$
$$-300\text{ N}(1.5\text{m}) - 981\text{ N}(1.5\text{m}) + 200\text{ N} \cdot \text{m} + T_C(3\text{m}) = 0$$

# Solución

---

Resolviendo,

$$A_z = 790\text{N} \quad B_z = -217\text{N} \quad T_C = 707\text{N}$$

- El signo negativo indica que  $B_z$  actúa hacia abajo
- La placa está parcialmente sostenida ya que los soportes no pueden evitar que gire alrededor del eje z si se aplica una fuerza en el plano x-y



# QUIZ

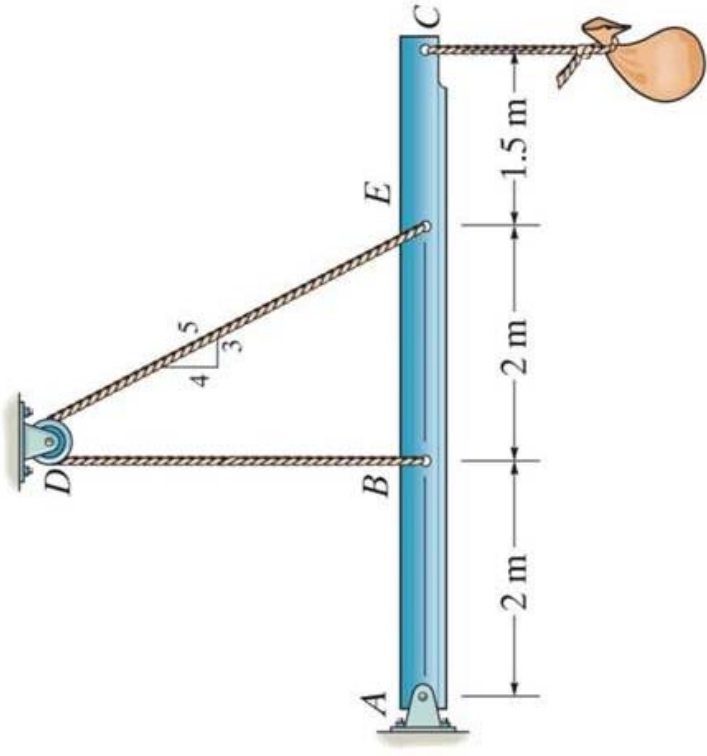
---

1. Si un soporte previene la traslación de un cuerpo, entonces el soporte ejerce \_\_\_\_\_ sobre él
  - A) un momento de par
  - B) una fuerza
  - C) un momento de par y una fuerza
  - D) ninguna respuesta es correcta
2. La fuerzas internas \_\_\_\_\_ se muestran en el diagrama de cuerpo libre.
  - A) siempre
  - B) a veces
  - C) raras veces
  - D) nunca

# QUIZ

3. La viga y el cable (con una polea sin fricción en D) aguantan una carga de 80 kg en C. En un DCL de la viga, ¿cuántas incógnitas hay?

- A) 2 fuerzas y 1 momento de par
- B) 3 fuerzas y 1 momento de par
- C) 3 fuerzas**
- D) 4 fuerzas



# QUIZ

---

4. Las fuerzas internas no se muestran en un DCL porque son \_\_\_\_\_.

A) iguales a cero

B) iguales y opuestas y no afectan a los cálculos

A) extremadamente pequeñas

D) no son importantes

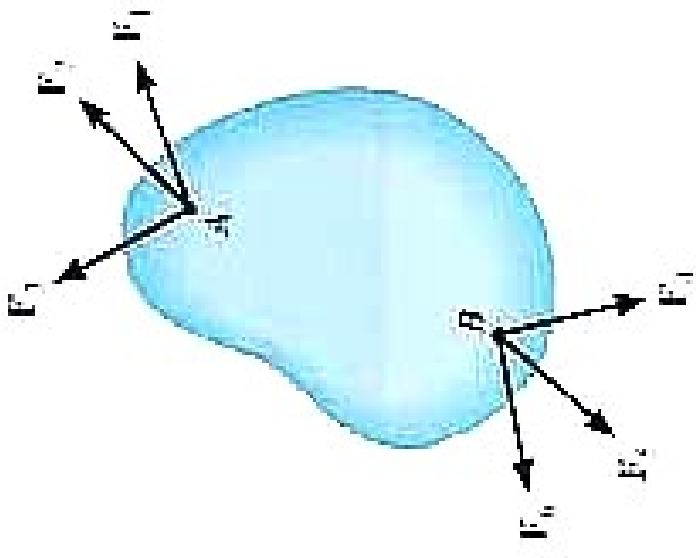
# QUIZ

5. Las tres ecuaciones  $\sum F_x = \sum F_y = \sum M_o = 0$ , son \_\_\_\_\_ ecuaciones de equilibrio en 2 dimensiones.

- A) incorrectas
- B) las únicas correctas
- C) las usadas comúnmente
- D) no suficientes

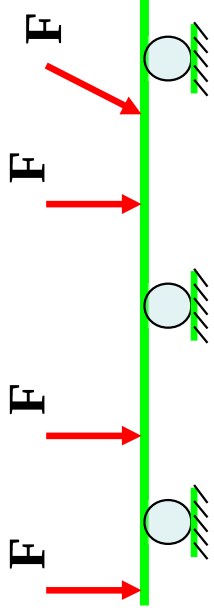
6. Este cuerpo rígido puede considerarse como un miembro de \_\_\_\_\_.

- A) fuerza única
- B) 2 fuerzas
- C) 3 fuerzas
- D) 6 fuerzas

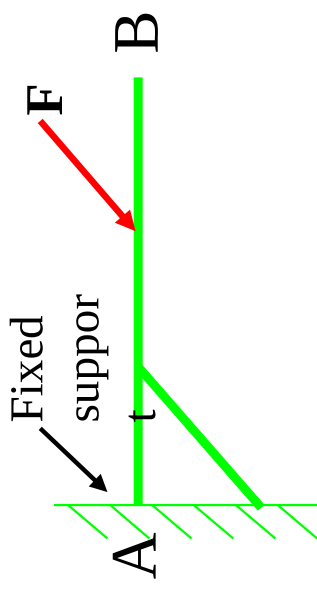


# QUIZ

1. Para la viga, ¿cuántas reacciones de los soportes hay, y está el problema estáticamente determinado?  
A) (2, Sí) B) (2, No) C) (3, Sí) D) (3, No)



8. La viga AB está cargada como se muestra: a) ¿cuántas reacciones de los soportes hay en la viga?, b) ¿está el problema estáticamente determinado?, c) ¿es la estructura estable?



- A) (4, Sí, No) B) (4, No, Sí)  
C) (5, Sí, No) D) (5, No, Sí)

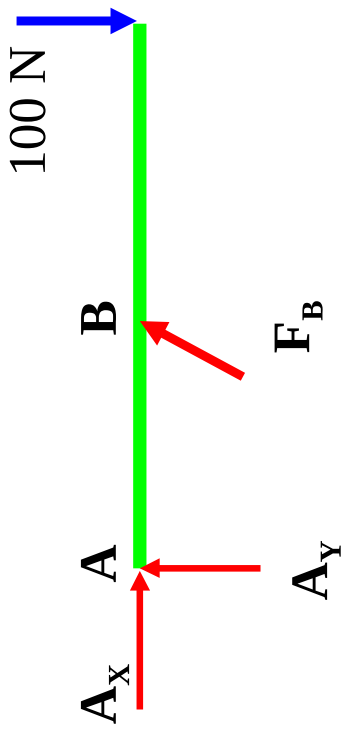
# QUIZ

9. ¿Qué ecuación de equilibrio permite calcular  $F_B$  directamente?

A)  $\sum F_x = 0$     B)  $\sum F_y = 0$

C)  $\sum M_A = 0$

D) Cualquiera de las anteriores.



10. Una viga está mantenida por una articulación y una rodadura. ¿Cuántas reacciones de los soportes hay y es la estructura estable para cualquier tipo de carga?

A) (3, Yes)    B) (3, No)

C) (4, Yes)    D) (4, No)



# QUIZ

---

11. Si un soporte previene la rotación de un cuerpo alrededor de un eje, entonces el soporte ejerce \_\_\_\_\_ sobre el cuerpo respecto a ese eje.

- A) un momento de par
- B) una fuerza
- C) A y B
- D) ninguna es correcta.

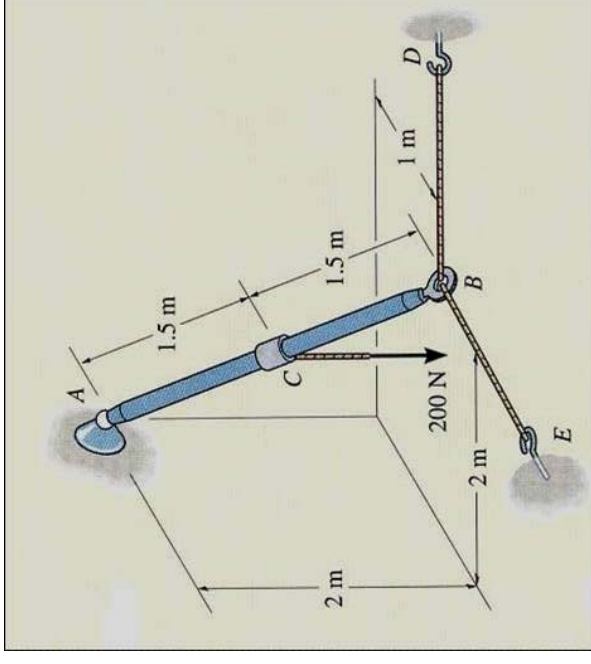
12. Cuando se analiza un problema en 3-D, se dispone de \_\_\_\_\_ ecuaciones escalares de equilibrio

- A) 3
- B) 4
- C) 5
- D) 6

# QUIZ

13. La barra AB está soportada mediante dos cables en u B y una unión de bola en A. ¿Cuántas reacciones de los soportes se desconocen en este problema?

- A) 5 fuerzas y 1 momento
- B) 5 fuerzas**
- C) 3 fuerzas y 3 momentos
- D) 4 fuerzas y 2 momentos



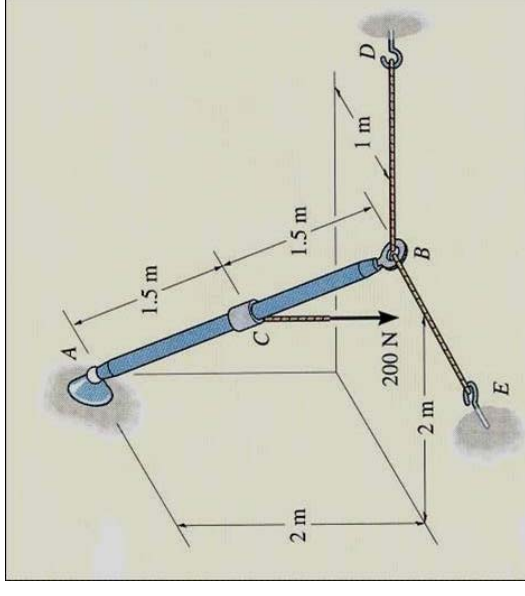


# QUIZ

14. Si se aplica un momento de par adicional en la dirección vertical a la barra AB en el punto C, ¿qué le sucede a la barra?

- A) La barra permanece en equilibrio porque los cables proporcionan las reacciones necesarias.
- B) La barra permanece en equilibrio ya que la unión de bola proporcionan las reacciones necesarias.
- C) La barra se vuelve inestable ya que los cables no pueden mantener las fuerzas de compresión.

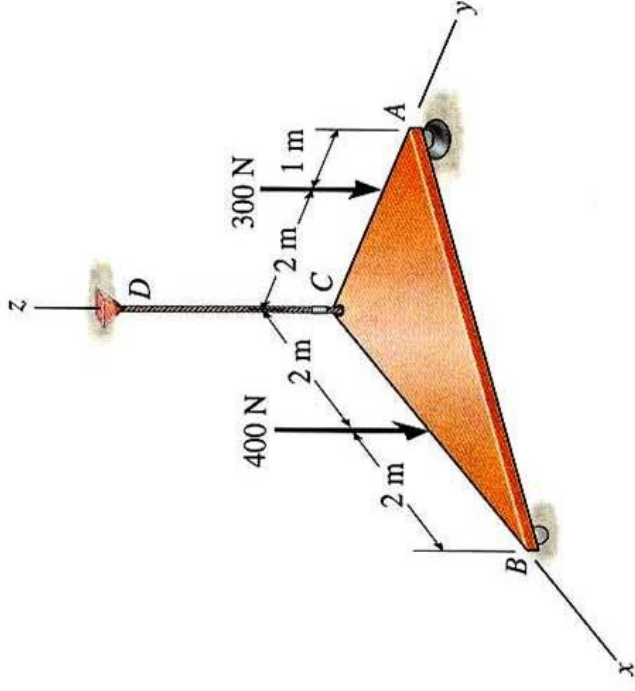
D) La barra se vuelve inestable porque el momento sobre AB no puede restringirse



# QUIZ

15. Un plato está soportado por una unión de bola en A, una rodadura en B, y un cable en C. ¿Cuántas reacciones desconocidas de los soportes hay en el problema?

- A) 4 fuerzas y dos momentos
- B) 6 fuerzas**
- C) 5 fuerzas
- D) 4 fuerzas y 1 momento



# QUIZ

16. ¿Cuál sería la manera más fácil de determinar la fuerza de reacción B en dirección Z ?

- A) La ecuación escalar  $\sum F_z = 0$
- B) La ecuación escalar  $\sum M_A = 0$
- C) La ecuación escalar  $\sum M_z = 0$
- D) La ecuación escalar  $\sum M_y = 0$

